ÎNCOVOIEREA GRINZILOR IN CARE REZISTENȚELE TREC DINCOLO DE LIMITA DE PROPORȚIONALITATE

de GH. EM. FILIPESCU
Inginer, Profesor la Școala Politecnică din București

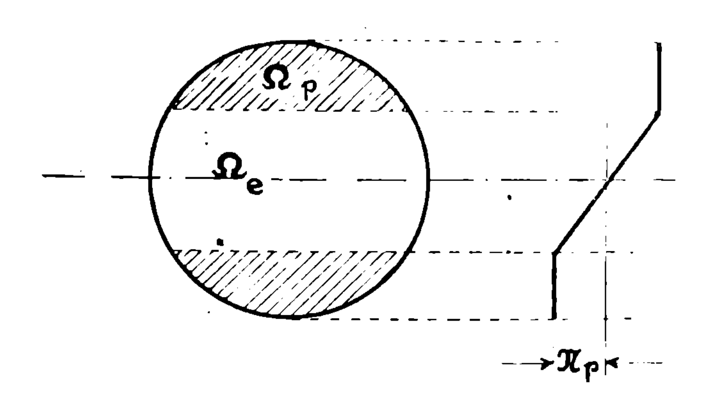
Chestiunea în sine este dificilă pentru că distribuția resistențelor pe secțiune nu se face după o lege care să se poată exprima simplu prin o formulă algebrică.

Este neapărat nevoie pentru a ajunge la câteva rezultate simple de a se face câteva ipoteze simplificatoare.

1) Se admite că se aplică și aci ipoteza lui *Bernoulli* și anume că secțiunile plane înainte de deformațiune rămân plane și după.

In acest caz se demonstrează foarte simplu că legea de distribuție a rezistențelor pe secțiune este dată chiar de curba caracteristică a materialului din care este făcută grinda.

2) Aceasta nu aduce însă o simplificare pentrucă nu putem exprima analitic curba caracteristică.



Pentru aceasta o normă de calcul este de a înlocui curba caracteristică prin două drepte:

a) Prima care coincide cu dreapta din curba caracteristică și care este dată de ecuatia: $N = E\varepsilon$ (legea lui *Hooke*).

b) A doua o dreaptă paralelă cu axa $O\varepsilon$.

3) Cu aceste simplificări mai admitem că limita de elasticitate naturală este la intersecția celor două drepte. Tot aci se presupune că este și limita de proporționalitate.

Se va mai admite că aceste două drepte, cari înlocuesc curba caracteristică reală, reprezintă o caracteristică convențională care se va bucura de proprietățile caracteristicei reale și anume: că materialul rămâne elastic până la sarcina ce a produs o deformație permanentă, că suprafața ei ne dă lucrul mecanic specific și că ea se întinde până la lungirea de ruptură.

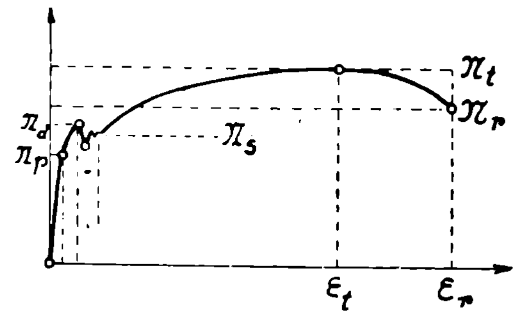
In aceste condiții rezultă că dincolo de limita de proporționalitate astfel stabilită corpul se comportă ca un corp plastic, adică el se deformează fără ca să fie nevoie de o creștere de rezistență, ci numai prin o consumare de lucru mecanic.

* * *

In aceste condiții să presupunem că avem o grindă supusă la încovoiere și că momentul de încovoiere dă rezistențe mai mari de cât limita de proporționalitate fixată ca mai sus.

Pentru că în axa neutră rezistențele sunt nule, urmează că în imediata apropiere a ei rezistențele vor fi mici și deci se vor găsi în regiunea în care curba caracteristică are ecuația $N = E\varepsilon$. Pentru că la periferia secțiunei rezistența a trecut dincolo de limita de proporționalitate, acolo rezistența va fi dată de ecuația foarte simplă $N = N_p$, dacă N_p este rezistența la limita de proporționalitate.

Dacă am admis că secțiunile rămân plane, atunci $\varepsilon = \omega y$, în care ω este încovoierea specifică, iar y distanța până la axa neutră.



In acest caz în prima regiune avem

$$N = E\omega y$$

iar în a doua regiune

$$N = N_p.$$

Prima regiune va fi separată de a doua prin două drepte paralele cu axa neutră, situate la distanța y_0, dată de relația

$$N_p = E\omega y_0 \tag{1}$$

Prima regiune se numește regiunea elastică, a doua regiunea plastică.

Putem acum proceda la calculul resistențelor din grindă.

Dacă grinda este supusă numai la un moment încovoietor, atunci suma rezistențelor de pe întreaga secțiune este nulă, deci:

$$(2)\qquad \begin{aligned} E\omega \int y d\Omega + N_p \Omega_p = 0, \\ E\omega S_e + N_p \Omega_p = 0, \end{aligned}$$

în care am notat cu S_e momentul static a suprafeței elastice în raport cu axa neutră, și cu Ω_p suprafața părții plastice. Să să se noteze că Ω_p în o parte este întinsă, în partea cealaltă comprimată, și ținând cont de acest fapt în expresia de mai sus Ω_p reprezintă diferența între suprafața plastică întinsă și între cea comprimată.

Dacă se ține cont de relația (1), relația (2) se transformă foarte simplu în:

$$(3)\qquad S_e + y_0 \Omega_p = 0$$

Ecuație foarte simplă ca expresie încă ceva mai complicată în realitate.

Ea conține în ea două necunoscute și anume y_0 și poziția axei neutre, deci ne va mai trebui încă o ecuație.

Aceasta o scoatem scriind că momentul forțelor interioare este egal cu momentul exterior, deci

$$(4)\qquad E\omega \int_e y^2 d\Omega + Np \int_p y d\Omega = M.$$

$\int_e y_2 d\omega$ este momentul de inețrie a părții elastice și-l notăm cu I_e, $\int_p y d\omega$ este momentul static al părții plastice în raport cu axa neutră. Să se noteze că tensiunile de pe partea întinsă rotesc secțiunea în acelaș sens ca și compresiunile de pe partea comprimată, deci cele două momente statice se adună. Deaceea vom denumi acest moment static: moment static *polar* al părții plastice și-l vom nota cu S_{pp}.

Mai departe, dacă împărțim momentul M prin N_p vom găsi momentul rezistent W_p necesar ca grinda să poată rezista. Deci vom avea încă:

$$W_p = M / N_p.$$

Mai notăm și:

$$W_e = I_e / y_0$$

Dacă în relația (4) introducem notațiile de mai sus și dacă ținem cont și de (1) avem:

$$(5)\qquad W_e + S_{pp} = W_p$$

Relațiile (3) și (5) ne determină complect poziția axei neutre și delimitează cele două regiuni prin găsirea lui y_0.

Se va observa că în cazul când axa neutră este paralelă

cu axa de simetrie a secţiunii, ecuaţia (3) este identic nulă, deci axa de simetrie este chiar axă neutră, şi ecuaţia (5) ne va da numai valoarea lui y_0 care delimitează cele 2 regiuni.

Este vorba acum să ştim dacă grinda se rupe sau nu.

In ipotezele admise mai sus, rezistenţa maximă din grindă este N_p şi se întinde pe toată regiunea plastică. Aceasta nu ne poate servi ca criteriu pentru a hotărâ dacă grinda se rupe sau nu. Singurul criteriu ce ne rămâne este compararea lungirilor cu lungirile la ruptură a materialului din care este făcută grinda.

Lungirea într'un punct al secţiunii va fi:

$$\varepsilon = \omega y_{max}.$$

In cazul când aceasta va fi egală sau mai mare de cât ε_r, lungirea specifică la ruptură, grinda se va rupe.

Va trebui deci să evaluăm pe ω.

Din (1) deducem imediat:

$$(6) \qquad \omega = N_p / E y_0 = M / (I_e + y_0 S_{pp})$$

ecuaţie absolut analoagă cu aceia de la încovoierea grinzilor în domeniul legii lui *Hooke.*

Din această ecuaţie, ţinând cont de

$$\omega = \partial^2 v / \partial s^2 = \partial^2 v / \partial x^2,$$

ţinând cont de direcţia normalei faţă de axele de coordonate, şi făcând aproximaţiile obişnuit admise, se deduce ecuaţia fibrei medii deformate:

$$-\partial^2 v / \partial x^2 = N_p / E y_0 = M / E (I_e + y_0 S_{pp})$$

Ecuaţia este ceva mai complicată de cât cea stabilită până la limita de proporţionalitate, pentru că y_0 şi deci implicit I_e şi S_{pp} sunt funcţiuni de momentul încovoietor.

* * *

Să presupunem că avem o grindă supusă la un sistem de sarcini cari într'un punct al grinzii are momentul maxim M. Să presupunem că am calculat rezistenţa maximă cu formula lui *Navier* şi am obţinut: $N = N_t = M / W$, adică în punctul cel mai obosit am rezistenţa maximă a materialului.

Grinda în acest caz *nu se va rupe*, pentru că rezistenţele variind după curba caracteristică, vor fi în orice caz mai mici de cât cele date de formula lui *Navier*. Prin urmare momentul încovoietor ce se capătă din formula de mai sus

este un moment limită, sub acţiunea căruia grinda nu se rupe niciodată.

Să presupunem că avem un moment mai mare, aşa fel ca să trecem cu rezistenţele în grindă dincolo de limita de proporţionalitate.

Să presupunem că pentru curba caracteristică convenţională stabilită mai sus, am luat ca limită pe proporţionalitate chiar rezistenţa maximă a materialului. Să presupunem că am mărit momentul până când în punctul cel mai obosit al secţiunii lungirea specifică este egală cu lungirea de ruptură. In acest caz pentru că în realitate rezistenţele se desvoltă după curba caracteristică, care este înscrisă în curba caracteristică convenţională, înseamnă că într'un punct oarecare al secţiunii rezistenţa totală a materialului este întrecută. Prin urmare în acest caz grinda se va *rupe neapărat.*

Momentul încovoietor ce corespunde acestei stări de lucruri este un moment sub acţiunea căruia grinda se va rupe todeauna.

In acest mod s'au stabilit două momente încovoietoare limite între cari se găseşte neapărat momentul de ruptură al grinzii.

Intervalul între aceste limite s'ar mai putea restrânge luând pentru lungirea specifică la ruptură lungirea ce corespunde punctului de pe caracteristică unde tangenta este paralelă cu axa lungirilor.

Care este momentul de ruptură?

Este foarte greu de calculat pentru că ar trebui să punem în calcul curba caracteristică reală. In acest caz suprafaţa de distribuţie a rezistenţelor pe secţiune depinzând de momentul încovoietor va depinde şi de forma secţiunii. Deci chestiunea se complică. Numai prin metode grafice şi prin încercări s'ar putea deduce aceasta.

O normă *ar fi* să găsim curba caracteristică convenţională justă, care ar fi echivalenta stării de fapt. Şi aci avem o dificultate şi anume nu putem hotărâ din ce punct de vedere să stabilim echivalenţa. *S'ar putea* de exemplu luà curba caracteristică convenţională care ar avea aceiaşi suprafaţă ca şi curba caracteristică reală până în punctul unde tangenta este paralelă cu axa lungirilor. In acest caz cele două caracteristice ar fi echivalente din punctul de vedere a lucrului mecanic specific.

Numai experienţe de laborator ar putea hătărâ în ce raport se găseşte această ipoteză cu realitatea.

Exemplu numeric.

O grindă de 4 m. deschidere, simplu rezemată la ambele

extremităţi este supusă la o forţă F la mijloc. Grinda este în fier dublu T profil 20.

Materialul din care este făcută grinda are caracteristicile: $E = 2,1 \times 10^6$, rezistenţa la limita de proporţionalitate $N_p \geqslant 1200$, rezistenţa la limita de scurgere $N_s \geqslant 2000$, rezistenţa maximă totală $N_t = 3700 - 4500$, lungirea la rupere $E_r = 26 - 35\%$, lucrul mecanic specific $L = 600 - 800$ kg. cm/cm³ (*Hütte* vol. I, pag. 546).

In calcul vom luà cifrele minime pentru a putea compara rezultatele.

După formula lui *Navier* sarcina maximă ce poate suporta grinda este:

$$F = 3700 \times 214 \times 10^5 = 7,92 \text{ tone}$$

In caracteristica convenţională luăm $N_p = N_t = 3700$.

Vom avea $y_{max.} = 10$ cm., $\omega = 0,26/10 = 0,026$; $y_0 = N_p / E\omega = 3700/2 \times 10^6 \times 0,026 = 0,0712 \text{ cm} \approx 0$.

In acest caz $W_e \approx 0$, şi rezultă:

$$W_p = S_{pp} = 2(8,25 \times 1,13 \times 9,435 + 10 \times 0,75 \times 5) = 251 \text{ cm}^3$$

$$F = 3700 \times 251 \times 10^5 = 9,29 \text{ tone.}$$

Prin urmare sarcina de ruptură va fi între 7,9 şi 9,3 tone. După cum se vede limitele nu sunt prea îndepărtate, căci diferă între ele numai cu 17%. Se va observa de asemenea că cu cât lungirile la ruptură sunt mai mici cu atât şi intervalul între cele două limite se va micşora.